可连续变化的四位NACA对称翼型的显性数学表达式

王天厚
剑桥大学工程学院

2018 年 8 月 26 日

目录

1 背景

NACA翼型是美国国家航空咨询委员会开发的一系列机翼的几何形状，该翼型族在各个领域均得到广泛应用。一般地，对这些翼型的绘制通常可以通过由各种在线翼型绘制软件输出的一系列坐标点来进行。这些坐标点可以导入到各种CAD软件中，并由平滑的曲线连接起来，从而得到目标翼型。这样绘制的翼型可以满足大部分几何制图，建模和设计的要求。

然而，在参数化的建模和设计过程中，尤其是在通过计算机进行设计优化时，可能需要模型具备受若干外部参数控制而自行调整的能力。在这样的情况下，所绘制的翼型能够以参数化的方式进行连续变化就成为了必须。在上述应用中，一般不能允许模型在重生成时重新从其他来源获取数据点，并且少有CAD软件具备这种能力。现今流行的CAD软件一般无法处理翼型绘制软件所使用的复杂的算法，故最可行的解决方案是使用翼型的方程式来确定模型中的曲线。这种方法的另外一个优点是比较可靠，排除了使用样条曲线拟合时定义不完全而可能出现的曲率反向情况，也避免了其他一些可能的错误，如曲线中的微小间断点。

以建模软件SOLIDWORKS为例，这个软件只允许绘制显性或参数方程驱动的曲线，并且方程式中的所有系数必须都是确定的。一种更加高级的建模软件，CREO，允许使用者编写一些简单的算式来确定方程式中的系数。然而，由于逻辑函数的欠缺，直接将翼型绘制算法编写于CAD软件之中仍然是不可行的。故为了达到前述的目的，比较好的解决方案是拥有一套翼型曲线的显性表达式，其中的系数也均为几个控制参数的显性函数。控制参数可以由外部程序或使用者直接调整，用来控制翼型的几何形状，比如最厚点的位置，或是后缘的厚度。

本文介绍一组能够确定NACA四位数对称翼型的变体的数学表达式。这一组表达式的特点是通过正向代入几个控制参数，就可以得到系数完全确定的翼型方程，并且在这个过程中不涉及逻辑函数。

2 四位NACA对称翼型的源定义

根据NACA第492号报告[1]，NACA四位数翼型的曲线形状可以藉由将y表示为一个分段函数的方式予以变化。这个分段函数的分段点在翼型最厚的x位置。

$$x = t \quad \text{for } 0 \leq t \leq 1 \tag{1}$$

$$y = \begin{cases} a_0\sqrt{t} + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 & \text{for } 0 \leq t \leq m \\ d_0 + d_1(1-t) + d_2(1-t)^2 + d_3(1-t)^3 & \text{for } m < t \leq 1 \end{cases} \tag{2}$$

其中m是控制翼型最厚点在弦线比例位置的参数，t是x和y表达式的参数，变化区间是从0到1。

在NACA第492号报告的附录中，收录了一个表格，其中包括若干种变体四位数翼型定义式的以上八个系数。然而，这种离散的列表表示法并不适用于参数化建模和计算机辅助最优化过程对于模型连续变化的要求。另外，在CAD软件中也很难编写能够从若干组系数中选择一组的算法。接下来的两节将会给出（对于任意选定的合理控制参数）确定这些系数的公式以及翼型表达式的最终形式，第五节给出这些公式的理论推导过程。

3 系数的决定式

下文使用如下所列的定义：

C 翼型的弦长

m 翼型最厚点的比例位置

T 翼型的比例厚度

D 翼型后缘的比例厚度

请注意，C是翼型绝对尺寸的唯一缩放参数。其他的三个参数都是比例参数，他们的值限定在0到1之间（对于D的值有更严格的要求，参见第六节）。

系数d_0

$$d_0 = \frac{1}{2}D \tag{3}$$

系数d_1

$$d_1 = -2.5m^4 + 7.1667m^3 - 2.725m^2 + 0.5033m + 0.155 \tag{4}$$

系数d_3

$$d_3 = \frac{-0.2 + (1-m)d_1 + 2d_0}{(1-m)^3} \tag{5}$$

系数d_2

$$d_2 = \frac{-d_1 - 3d_3(1-m)^2}{2(1-m)} \tag{6}$$

中间系数R

$$R = \frac{(1-m)^2}{2d_1(1-m) - 0.6 + 6d_0} \tag{7}$$

系数a_0

$$a_0 = 0.2969 \quad \text{（对于正常的前缘弧度）} \tag{8}$$

中间系数β

$$\beta = \frac{1}{R} + \frac{a_0}{4(\sqrt{m})^3} \tag{9}$$

系数a_3

$$a_3 = \frac{0.1 - \frac{1}{2}a_0\sqrt{m} + \frac{1}{2}\beta m^2}{m^3} \tag{10}$$

系数 a_2

$$a_2 = \frac{1}{2}\beta - 3ma_3 \tag{11}$$

系数a_1

$$a_1 = -\frac{a_0}{2\sqrt{m}} + 3a_3m^2 - \beta m \tag{12}$$

将以上系数带入式(1)和式2，就得到单位弦长翼型上翼面的曲线。若要得到完整的翼型曲线：

- 将式(1)和式2按照参数C进行缩放
- 将式2按照$\frac{T}{0.2}$进行缩放
- 将后缘用直线连接起来

4 表达式的最终形式

用以上的公式确定系数，并将表达式进行适当的缩放，可以将翼型表达式写成如下的最终形式：

$$x = Ct \quad \text{for } 0 \le t \le 1 \tag{13}$$

$$\pm y = \begin{cases} \frac{CT}{0.2}[a_0\sqrt{t} + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3] & \text{for } 0 \le t \le m \\ \frac{CT}{0.2}[d_0 + d_1(1-t) + d_2(1-t)^2 + d_3(1-t)^3] & \text{for } m < t \le 1 \end{cases} \tag{14}$$

如果需要显性表达式：

$$\pm y = \begin{cases} \frac{CT}{0.2}[a_0\sqrt{\frac{x}{C}} + a_1\frac{x}{C} + a_2(\frac{x}{C})^2 + a_3(\frac{x}{C})^3] & \text{for } 0 \le x \le mC \\ \frac{CT}{0.2}[d_0 + d_1(1-\frac{x}{C}) + d_2(1-\frac{x}{C})^2 + d_3(1-\frac{x}{C})^3] & \text{for } mC < x \le C \end{cases} \tag{15}$$

5 对系数决定式的推导

本节展示上述系数决定式的推导过程。

请注意，由等式(1)可见，$x = t$，这一关系在下文中经常使用。

5.1　定义的性质

根据NACA第492号报告定义，四位对称翼型的变体由一组三次多项式分段函数来表示（见等式(2)）。容易看出，这是一个良好的定义，因为它总是具备以下的性质：

1. 翼型曲线通过原点。
2. 翼型曲线在$x = 1$, $y = d_0$处终止，所以后缘的厚度只受d_0一个系数的控制。
3. 翼型曲线在$x = 0$处，斜率是正无穷，也就是说：

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \infty$$

   这保证了翼型有一个圆润的前缘（除非系数a_0取零值，在这种情况下，翼型具备尖锐的前缘）。

5.2　表达式的第一条件

由于翼型曲线由分段函数控制，为了保证两个y等式在$t = m$处平滑衔接，以下的条件必须得以满足：

1. 在$t = m$处$y = 0.1$，也就是说，在$x = m$时，翼型曲线达到指定的厚度。由于翼型的厚度是一个全局的缩放系数，直接乘在y等式的前面，在推导系数的决定式时，取常数0.1能够带来方便。为达到所需厚度而进行的缩放可在之后进行。这是等式(14)和(15)中分母上有一个常数0.2的原因。
2. $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{x=m} = 0$，也就是说，曲线在$x = m$处达到极大值。

两个y等式都必须满足这些条件。

5.3 d_2和d_3系数的确定

考虑第二个y等式：

$$\begin{aligned} y &= d_0 + d_1(1-t) + d_2(1-t)^2 + d_3(1-t)^3 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -d_1 - 2d_2(1-t) - 3d_3(1-t)^2 \end{aligned}$$

强制其满足5.2节列出的条件，可以得到以下的方程组：

$$\begin{cases} d_0 + d_1(1-m) + d_2(1-m)^2 + d_3(1-m)^3 & = 0.1 \\ -d_1 - 2d_2(1-m) - 3d_3(1-t)^2 & = 0 \end{cases}$$

其中$d_0 = \frac{D}{2}$是选定的系数。解这一方程组可以得到等式(5)和(6)，这两个等式将d_2和d_3用d_0和d_1加以表示。

5.4 d_1系数的确定

NACA第492号报告给出了五个离散的d_1系数参考值。d_1系数描述翼型曲线在后缘处的角度，这可以由以下的关系看出：

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = -d_1$$

d_1的选定值必须能够保证在翼型曲线的后半段，不会出现曲率反向的情况。对NACA报告中给出的参考值进行四次多项式拟合，可以得到等式(4)。表1列出NACA报告中给出的d_1参考值，以及在相应点由等式(4)计算的值。

表 1: d_1系数的值

m	NACA报告中的d_1	由等式(4)计算的d_1
0.2	0.200	0.1999936
0.3	0.234	0.2339909
0.4	0.315	0.3149888
0.5	0.465	0.4649875
0.6	0.700	0.6999872

由表1可见，在$0.2 \leq m \leq 0.6$的范围内，等式(4)的精度非常高。因此，有理由猜测系数d_1背后的数学关系可能是多项式形式的。然而多项式拟合的可靠性有待商榷，这是本文所介绍的方法的一个缺陷。关于这一问题的更多讨论，请参看第6节。

5.5 a_0系数的确定

请注意，在等式(8)中，系数a_0的值是给定的。这一给定值并不是随意的。a_0的值与翼型曲线前缘的弧度有直接的关系。

在平面直角坐标系中，曲线的曲率半径由以下公式给出：

$$\text{曲率半径} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$
$$\text{where } y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

在本文的情景下，有以下的关系：

$$y' = \frac{a_0}{2\sqrt{x}} + a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$
$$y'' = -\frac{a_0}{4(\sqrt{x})^3} + 2a_2 + 6a_3x$$

将以上关系代入曲率半径公式，并取极限，可以得出：

$$\lim_{x\to 0} R = \frac{{a_0}^2}{2}$$

因此，可以再多定义一个翼型曲线的控制参数，用来调整前缘的弧度，系数a_0的值可由这个参数直接得出，本文所提出的公式在一定a_0范围内都是可靠的（NACA报告中测试的范围为0至0.51424）。然而本文无意讨论前缘弧度的变化。值得注意的是，a_0的值必须是非负的。

5.6 表达式的第二条件

在第二个y等式的系数都被确定了以后，可以开始确定第一个y等式的系数。同样的方法在第一个y等式中仍然奏效：可以利用表达式的第一条件得

到两个三元一次方程（注意a_0的值是给定的，故在方程组中作常数处理）。

$$\begin{cases} y = a_0\sqrt{m} + a_1 m + a_2 m^3 + a_3 m^3 & = 0.1 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=m} = \frac{a_0}{2\sqrt{m}} + a_1 + 2a_2 m + 3a_3 m^2 & = 0 \end{cases}$$

现在得到了两个三元一次方程，必须再列出第三个方程，方能解出三个未定系数的表达式。

在这种情况下，必须再引入一个第二条件：**在$t = m$处，两段翼型曲线的曲率半径必须相等**。

在$x = m$处翼型曲线的曲率半径可以由第二个y等式（系数已知）来计算。计算的过程是将以下的两个表达式代入曲率半径的定义。计算的结果由等式(7)给出。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=m} = -d_1 - 2d_2(1-m) - 3d_3(1-m)^2$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_{t=m} = 2d_2 + 6d_3(1-m)$$

在以上两个表达式中，d_2和d_3应该用等式(5)和(6)的关系，以d_1和d_0来表示。应当注意，由于四个d系数现在都已确定，等式(7)的R是一个常数R_0。

由第一个y等式计算的$x = m$点曲率半径由以下等式给出，且由于引入了第二条件，必须等于R_0：

$$R = \frac{1}{-\frac{a_0}{4(\sqrt{x})^3} + 2a_2 + 6a_3 x} = R_0$$

上式可以整理成所需的第三个三元一次方程：

$$-\frac{a_0}{4(\sqrt{x})^3} + 2a_2 + 6a_3 x = \frac{1}{R_0}$$

现在即可解方程组而得到a_1，a_2和a_3，结果由等式(10)，(11)和(12)给出。

6 以上表达式的一个缺陷

本文所阐述的方法包含一个缺陷：对于系数d_1的确定并不可靠。NACA第492号报告中并未提及其给出的d_1参考值是如何获得的，只提到了d_1的选择应当保证曲率反向不会在后半段翼型曲线中出现。

如果曲率不出现反向的情况，在从$x=m$到$x=1$的任意一点，曲率半径的符号都必须与上一节所述R_0的符号相同，也就是负值。故这一条件可以被写成：

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} < 0 \quad \text{for } m \le x \le 1$$
$$\text{where } y' = -d_1 - 2d_2(1-x) - 3d_3(1-x)^2,\ y'' = 2d_2 + 6d_3(1-x)$$

可以猜测，以上的条件将会给出一个d_1必须满足的不等式。然而，上述条件非常难以用代数方法整理出关于d_1的显性的不等式。必须注意到，以上条件中包含了系数d_2和d_3，**然而这两个系数与d_0有关系**。在NACA第492号报告中，所给出的d_1参考值只与m有关，这是因为其所研究的翼型都有固定的（非常小）厚度的后缘，也就是说d_0在该报告中是一个定值。二维翼型理论中，可以证明，只有后缘非常尖锐的机翼才能产生可用升力，故该报告未变化d_0是有一定道理的。d_0的变化会如何影响d_1，尚不清楚，但应该假设d_0的变化有可能导致上述不等式不成立。故使用本文所阐述的参数模型时，最好将d_0固定在0.002（为NACA报告中取值），若确需变化，应当采用很小的幅度，并注意检查翼型的曲率。

后续的工作应当用数值的方法研究d_0可变的范围，并将本文所述模型拓展到二维非对称四位翼型。

参考文献

[1] John Stack and Albert E. von Doenhoff. *Tests of 16 related airfoils at high speed.* Available at https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19930091566